



浸透計算の水収支誤差の考察と 斜面水文過程の解析

京都大学農学研究科山地保全学研究室
小杉賢一朗

水収支誤差の考察

鉛直一次元の不飽和浸透

水収支式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z}$$

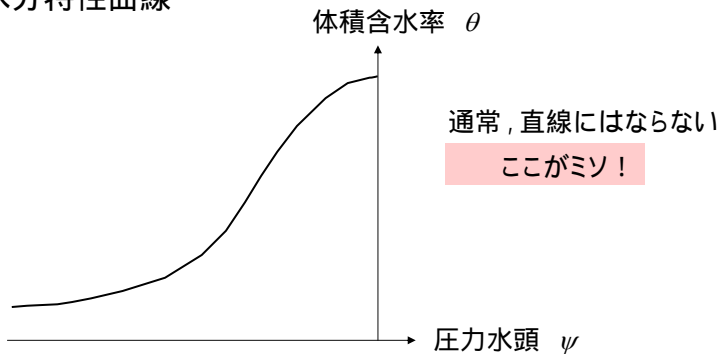
θ : 体積含水率 q : 水分フラックス
 t : 時間 z : 上方を正とした鉛直距離

一次の差分式で近似

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \cong \frac{\theta_{t+\Delta t} - \theta_t}{\Delta t}$$

ここで発生するErrorは対象としない

水分特性曲線



Richards式を θ ベースで解く = θ の時間・空間変動を求める

計算領域に地下水帯が含まれると計算が難しい
計算領域の土壌が不均質だと計算が難しい

Richards式を ψ ベースで解く = ψ の時間・空間変動を求める

水収支誤差が発生する

Ricahrds式を ψ ベースで解く

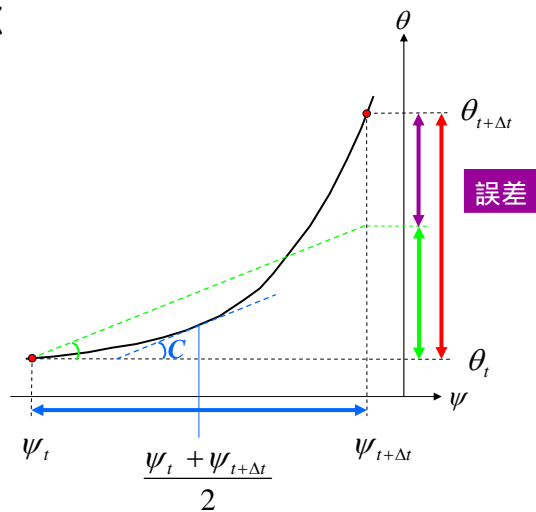
$$\frac{\theta_{t+\Delta t} - \theta_t}{\Delta t}$$

C: 水分特性曲線の傾き

Ricahrds式を ψ ベースで解く

$$\frac{\theta_{t+\Delta t} - \theta_t}{\Delta t} \approx C \frac{\psi_{t+\Delta t} - \psi_t}{\Delta t}$$

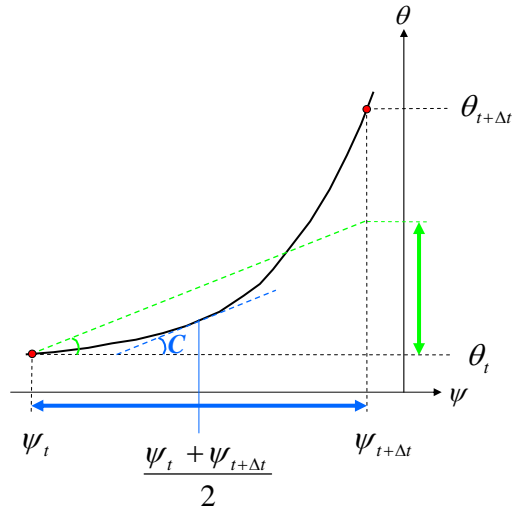
C: 水分特性曲線の傾き



Picard法 (反復計算)

$$C \frac{\psi_{t+\Delta t} - \psi_t}{\Delta t}$$

$$C \Big|_{\psi = \frac{\psi_t + \psi_{t+\Delta t}}{2}} \frac{\psi_{t+\Delta t} - \psi_t}{\Delta t}$$



まず時刻 $t + \Delta t$ の値を予測する

$$\psi_{t+\Delta t}^0$$

時刻 $t + \Delta t$ の値を計算する

$$\psi_{t+\Delta t}^1$$

$$C \Big|_{\psi = \frac{\psi_t + \psi_{t+\Delta t}^0}{2}} \frac{\psi_{t+\Delta t}^1 - \psi_t}{\Delta t}$$

$\psi_{t+\Delta t}^0$ と $\psi_{t+\Delta t}^1$ が...

一致した → 解が得られた (計算終了)

一致しない → $\psi_{t+\Delta t}^1$ を新たな予測値として同様の計算を行い $\psi_{t+\Delta t}^2$ を求める。一致するまで計算を繰り返す。

$$C \Big|_{\psi = \frac{\psi_t + \psi_{t+\Delta t}^0}{2}} \frac{\psi_{t+\Delta t}^1 - \psi_t}{\Delta t}$$

m : 繰り返し計算回数

$$C \Big|_{\psi = \frac{\psi_t + \psi_{t+\Delta t}^m}{2}} \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_t}{\Delta t}$$

ψ ベースの解法 (従来の方法) : **Method A**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx C \Big|_{\psi = \frac{\psi_t + \psi_{t+\Delta t}^m}{2}} \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_t}{\Delta t}$$

Celiaの方法 (修正Picard法) : **Method B**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} = \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_{t+\Delta t}^m}{\Delta t} + \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\Delta t}$$

ψ ベースの解法 (従来の方法) : **Method A**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx C \Big|_{\psi = \frac{\psi_t + \psi_{t+\Delta t}^m}{2}} \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_t}{\Delta t}$$

Celiaの方法 (修正Picard法) : **Method B**

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} &= \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_{t+\Delta t}^m}{\Delta t} + \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\Delta t} \\ &\approx C \Big|_{\psi = \psi_{t+\Delta t}^m} \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m}{\Delta t} + \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\Delta t} \end{aligned}$$

ψ ベースの解法 (従来の方法) : **Method A**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx C \Big|_{\psi = \frac{\psi_t + \psi_{t+\Delta t}^m}{2}} \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_t}{\Delta t}$$

Celiaの方法 (修正Picard法) : **Method B**

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} &= \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_{t+\Delta t}^m}{\Delta t} + \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\Delta t} \\ &\approx C \Big|_{\psi = \psi_{t+\Delta t}^m} \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m}{\Delta t} + \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\Delta t} \end{aligned}$$

繰り返し計算が進むと

$$\psi_{t+\Delta t}^{m+1} = \psi_{t+\Delta t}^m$$

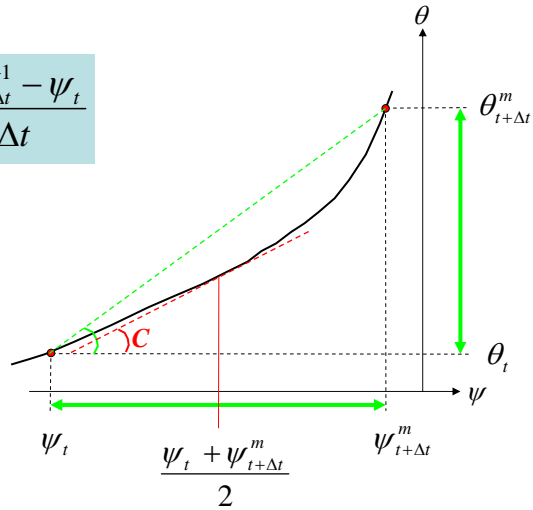
$$\theta_{t+\Delta t}^{m+1} = \theta_{t+\Delta t}^m$$

ψ ベースの解法 (従来の方法) : **Method A**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx C \Big|_{\psi = \frac{\psi_t + \psi_{t+\Delta t}^m}{2}} \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_t}{\Delta t}$$

Rathfelderの方法 : **Method C**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\psi_{t+\Delta t}^m - \psi_t} \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_t}{\Delta t}$$



ψ ベースの解法 (従来の方法) : **Method A**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx C \Big|_{\psi = \frac{\psi_t + \psi_{t+\Delta t}^m}{2}} \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_t}{\Delta t}$$

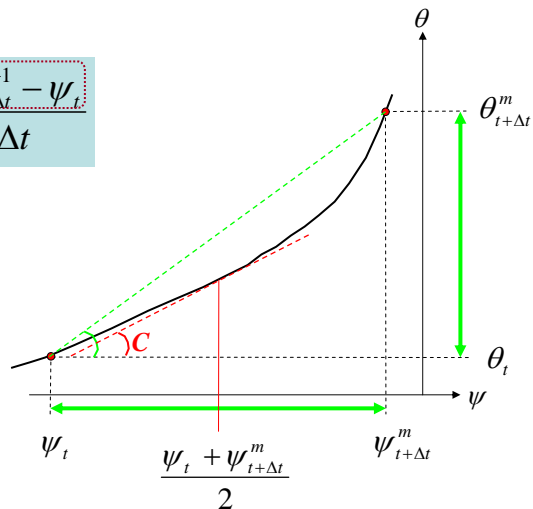
Rathfelderの方法 : **Method C**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\psi_{t+\Delta t}^m - \psi_t} \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_t}{\Delta t}$$

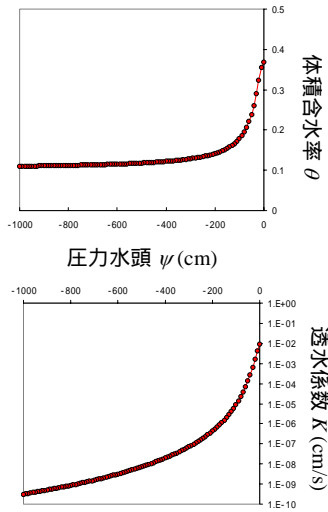
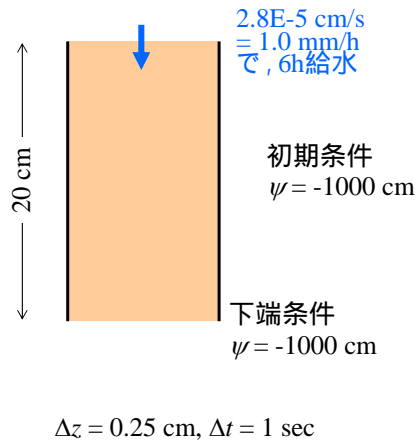
繰り返し計算が進むと

$$\psi_{t+\Delta t}^{m+1} = \psi_{t+\Delta t}^m$$

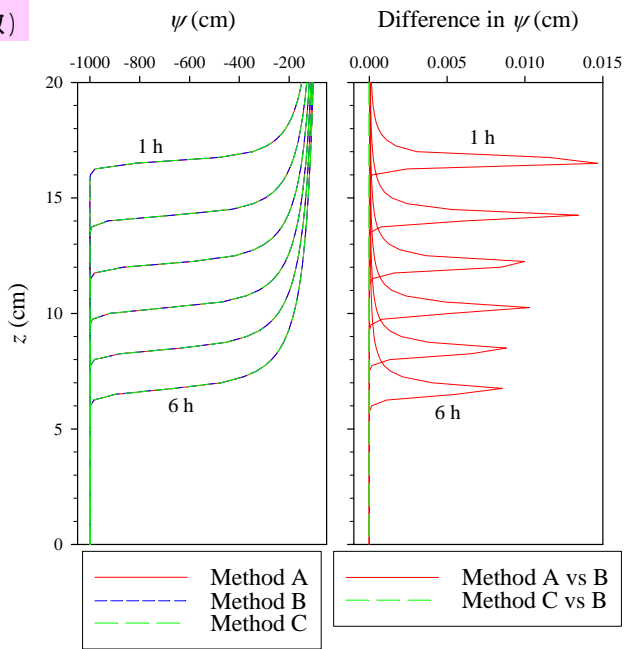
$$\theta_{t+\Delta t}^{m+1} = \theta_{t+\Delta t}^m$$

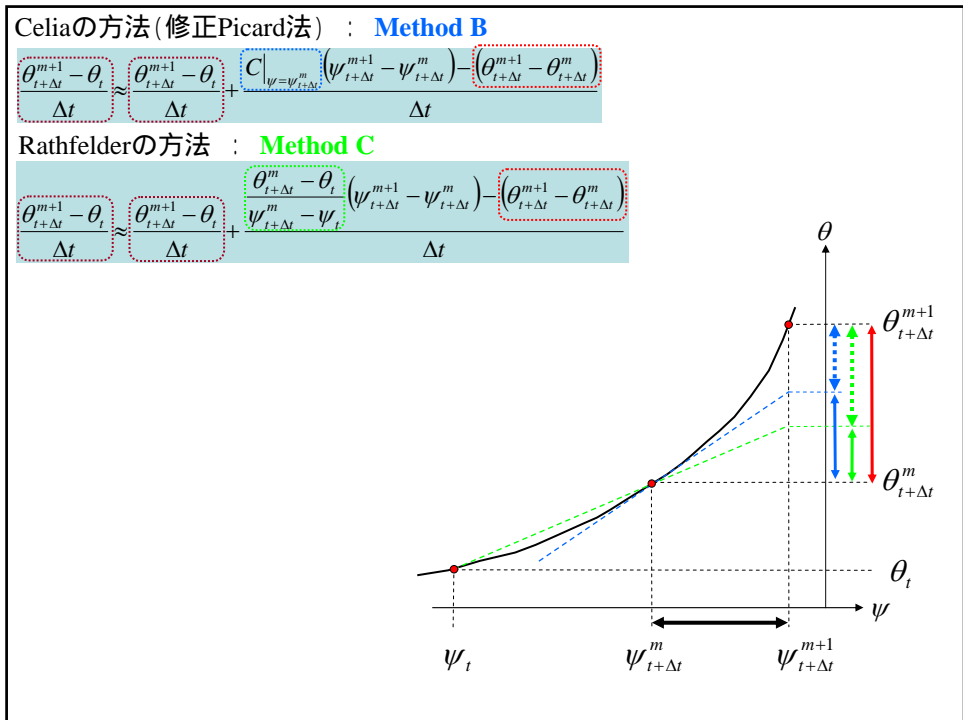
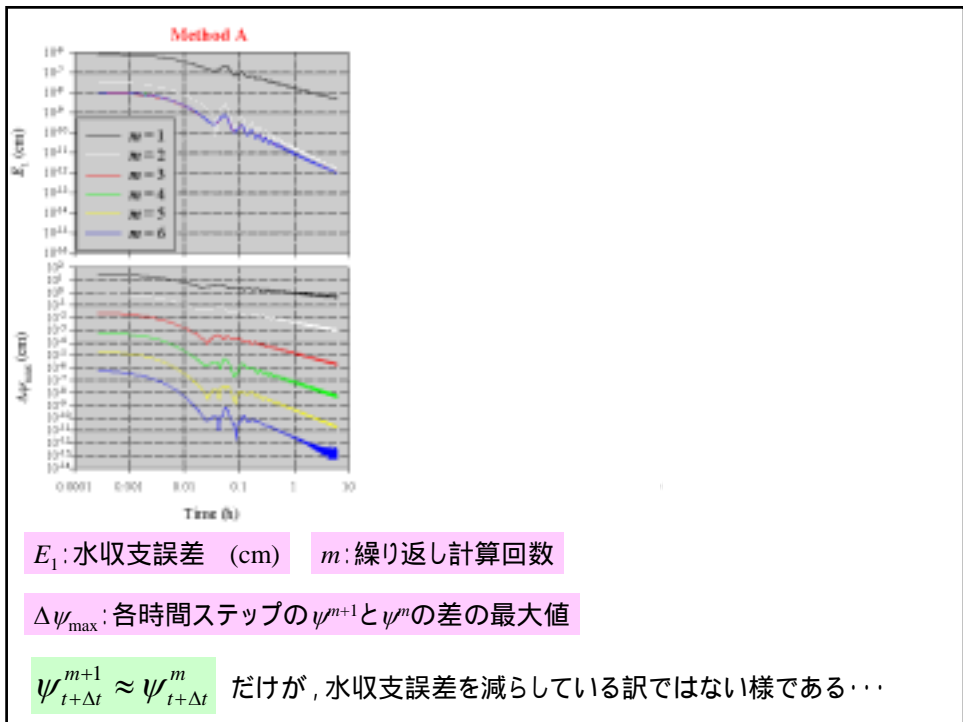


数値計算による各手法の比較



$m = 6$
 (繰り返し計算回数)





Celiaの方法 (修正Picard法) : **Method B**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} + \frac{C}{\Delta t} \Big|_{\psi=\psi_{t+\Delta t}^m} (\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m) - (\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_{t+\Delta t}^m)$$

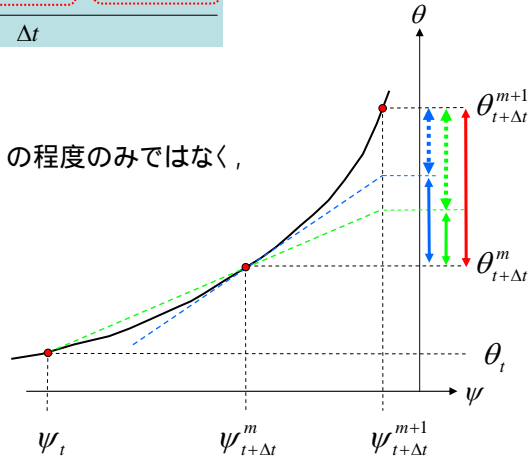
Rathfelderの方法 : **Method C**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} + \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\psi_{t+\Delta t}^m - \psi_t} (\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m) - (\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_{t+\Delta t}^m)$$

誤差に影響するのは、単に

$$\psi_{t+\Delta t}^{m+1} \approx \psi_{t+\Delta t}^m \quad \theta_{t+\Delta t}^{m+1} \approx \theta_{t+\Delta t}^m$$

の程度のみではなく、



Celiaの方法 (修正Picard法) : **Method B**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} + \frac{C}{\Delta t} \Big|_{\psi=\psi_{t+\Delta t}^m} (\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m) - (\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_{t+\Delta t}^m)$$

Rathfelderの方法 : **Method C**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} + \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\psi_{t+\Delta t}^m - \psi_t} (\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m) - (\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_{t+\Delta t}^m)$$

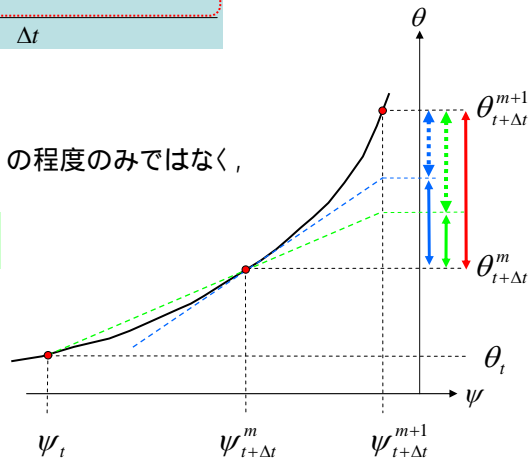
誤差に影響するのは、単に

$$\psi_{t+\Delta t}^{m+1} \approx \psi_{t+\Delta t}^m \quad \theta_{t+\Delta t}^{m+1} \approx \theta_{t+\Delta t}^m$$

の程度のみではなく、

$$\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_{t+\Delta t}^m \text{ を } \psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m$$

で近似するときの精度も重要。



Celiaの方法(修正Picard法) : **Method B**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} + C \left|_{\psi = \psi_{t+\Delta t}^m} (\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m) - (\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_{t+\Delta t}^m) \right.$$

E_2 :この部分の
全接点積算値

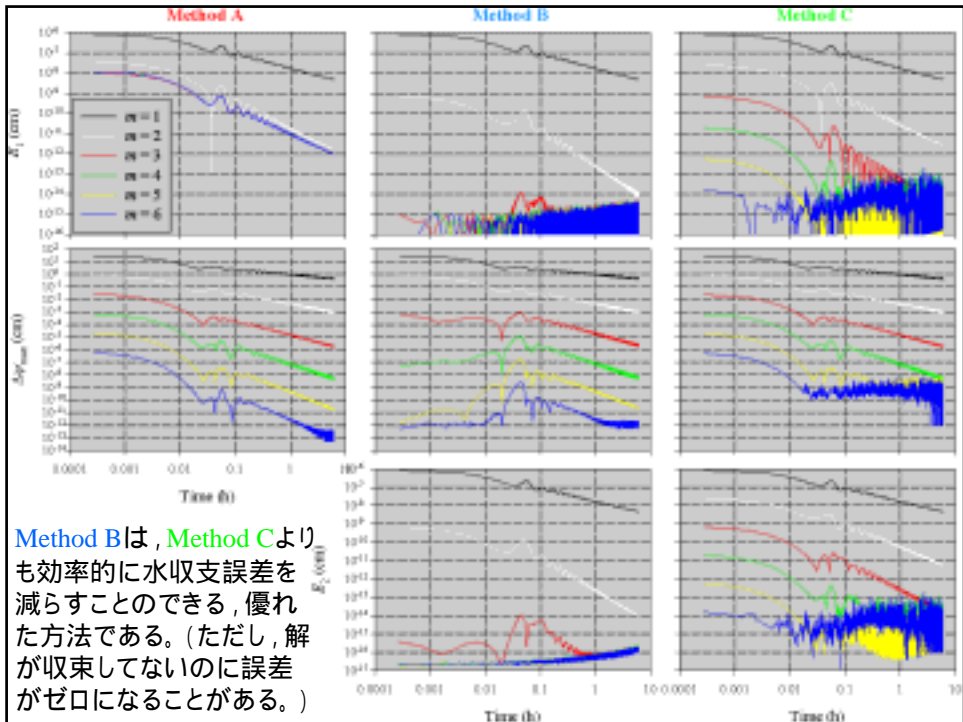
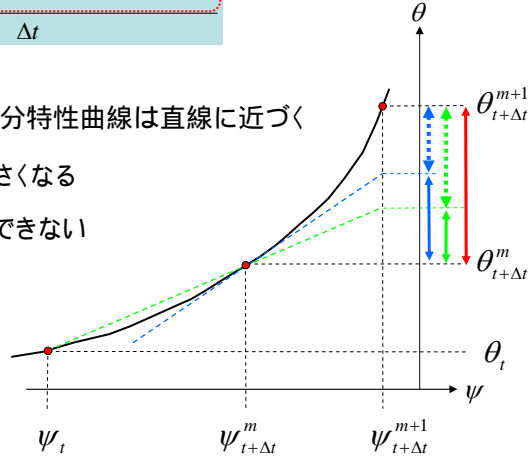
Rathfelderの方法 : **Method C**

$$\frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} \approx \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} + \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\Delta t} (\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m) - (\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_{t+\Delta t}^m)$$

$\psi_{t+\Delta t}^m$ と $\psi_{t+\Delta t}^{m+1}$ が近づけば、水分特性曲線は直線に近づく

Method B では、誤差が急激に小さくなる

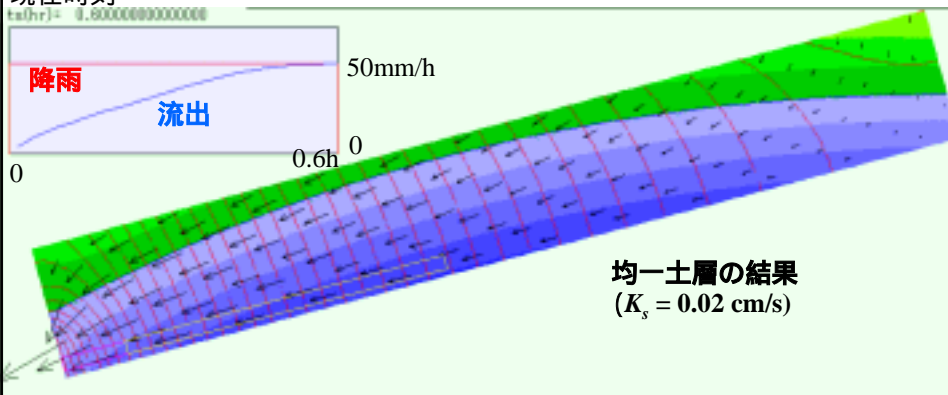
Method C では、この効果は期待できない



斜面水文過程の解析(例)

2Dシミュレーション(有限要素法)によるパイプの効果の数値実験

現在時刻



厚さ10cm, 長さ70cm, 勾配16°の実験土層
土層表面に50mm/hの強度で0.6時間散水
土層下流面より排水
土層底面と, 上流面は不透水

