土中への水の浸潤　3. Green and Ampt モデル

取出伸夫[1]・渡辺晋生[1]・久行雄大[1]・坂井　勝[2]

Infiltration into a soil profile: 3. Green-Ampt model.

Nobuo TORIDE[1], Kunio WATANABE[1], Yudai HISAYUKI[1] and Masaru SAKAI[2]

1. はじめに

ここまで，砂質ロームとシルトを対象に，地表面から鉛直下方への土中への水の一定フラックス条件の非湛水浸潤と，一定圧力条件による不飽和浸潤を，土中の圧力水頭分布，不飽和透水係数分布，水分量分布から解説した（取出ら，2009，以下第 1 報）．そして，一定負圧条件の浸潤について，初期水分量の影響を調べ，Philip の示した浸潤前線の移動速度式や浸潤モデルの吸水度 S と定数 A の検討を行った（取出ら，2010，以下第 2 報）．土中への水の鉛直浸潤は，浸潤初期はダルシー則における圧力勾配成分が支配的であるが，時間が経過すると重力成分が卓越していく現象である（Hillel，2001）．土性，境界圧力，初期水分量といった様々な条件における鉛直浸潤の形態を考察する際，それぞれの条件における重力の役割を定量的に把握することが重要であった．

土への水の浸潤速度を与える浸潤方程式は，古くから多くの研究が行われてきた（宮崎，2000）．第 2 報では，リチャーズ式の解に基づき提案された Philip の浸潤モデルを示した．一方，リチャーズ式により不飽和水分移動の定式化が整う以前に提案され，本日まで多くの理論的，また実験による検証が行われているのが Green and Ampt（以下 G & A）モデルである（Green and Ampt，1911）．特に，G & A 式ともよばれる鉛直浸潤の浸潤速度式（後述の（17）式）は，古典的なモデルとして広く知られている（Hillel，2001；宮崎，1984；宮崎，2000；宮崎ら，2005）．この Green and Ampt の原著については，土壌の物理性 105 号「古典を読む」シリーズにおいて，長谷川（2007）が解説している．

原著における G & A モデルは，土への水の浸潤を毛管への水の浸入とみなし，「前進毛管力」とよばれる浸潤前線に働く張力を定義して浸潤速度を導いている（長谷川，2007）．その後，多くの研究者によって G & A モデルの解釈が行われ，現在の多くの土壌物理の教科書においては，水平浸潤と鉛直浸潤における G & A モデルについて，ダルシー則に基づく解釈が示されている．G & A モデルは，その明解かつ単純な仮定に対する評価は高いが，「前進毛管力」，すなわち浸潤前線の有効圧力水頭（以下，前線有効圧力）が測定できないことがモデルの限界とされている（Hillel，2001; Jury and Horton，2006）．そのため，精度の高い水分分布や圧力分布の詳細が得られる浸潤過程の数値実験において，前線有効圧力を決定して G & A モデルを改めて検討する意義は大きいと考える．また，G & A モデルは，浸潤前線の水分分布の形状から説明されることが多く，浸潤前線が広がらずに急勾配な形状を維持する鉛直浸潤は，G & A モデルの仮定を満たすと単純に思われがちである．しかし，鉛直および水平浸潤に対する G & A モデルの適用性は，前線有効圧力の観点から再検討する必要がある．さらに，多くの研究が表面湛水条件における浸潤が対象であり，水分不飽和の負圧浸潤については系統だった解析は見られない．

そこで今回は，様々な境界圧力，初期圧力を持つ砂質ロームとシルトの負圧浸潤を対象に，G & A モデルを適用して検討を行った．前報までに示した水平浸潤と鉛直浸潤の数値実験から得られる浸潤水量変化に対して，G & A モデルを適用して前線有効圧力を決定した．そして，得られた前線有効圧力に基づき G & A モデルの適用条件を考察した．用いた基礎方程式や境界条件，その他記号などすべて第 1 報，第 2 報と同じである．浸潤分布の領域は，第 1 報 Fig. 3 の用語を用いた．示した浸潤条件に対応する水分量，圧力水頭，透水係数は，第 2 報 Table 1 により確認できる．また数値実験には，今まで同様 HYDRUS-1D（Šimůnek et al.，2008）を用いた．

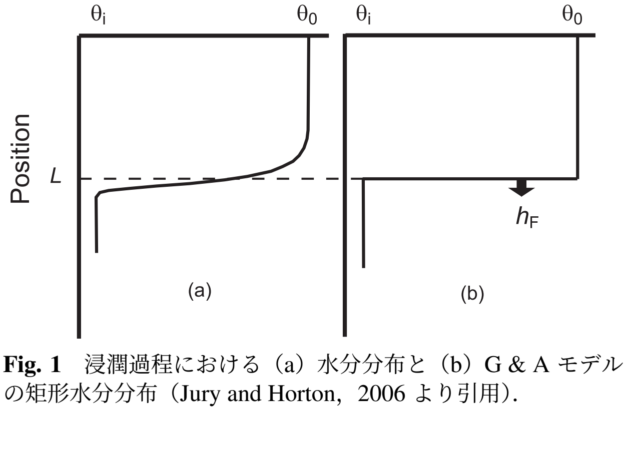

Fig. 1　浸潤過程における（a）水分分布と（b）G & A モデルの矩形水分分布（Jury and Horton，2006 より引用）．

[1]Graduate School of Bioresources, Mie University, 1577 Kurima-Machiya, Tsu, Mie 514-8507, Japan. Corresponding author: 取出伸夫，三重大学大学院生物資源学研究科
[2]Utah State University, Dep. Plants, Soils, and Climate
2010 年 6 月 8 日受稿　2010 年 6 月 21 日受理
土壌の物理性 115 号, 51–60 (2010)

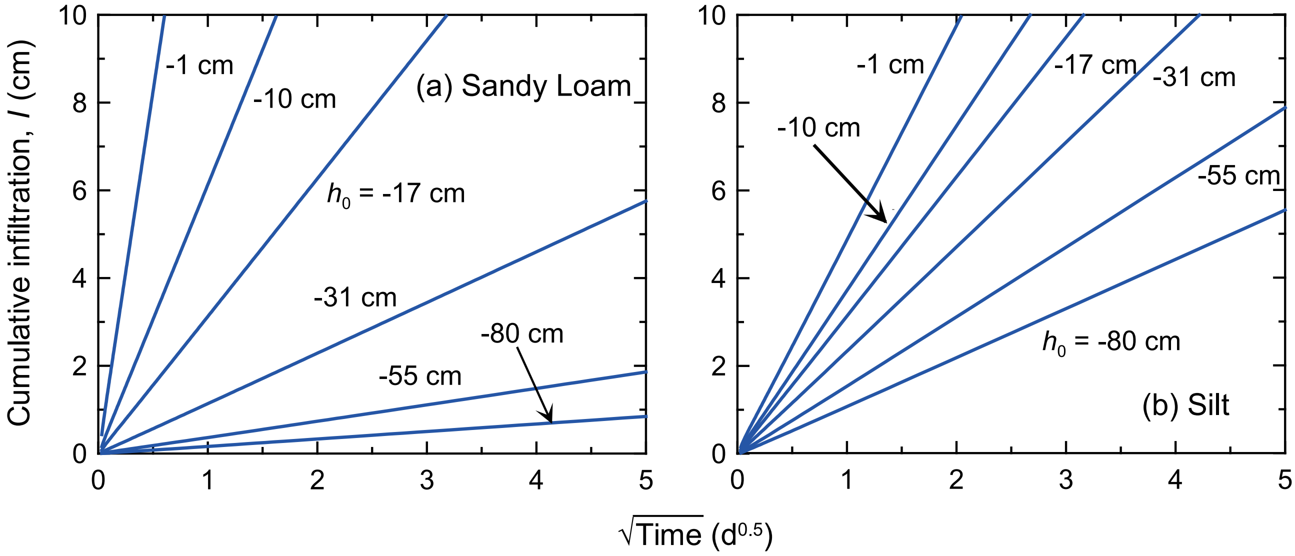

Fig. 2 (a) 砂質ローム，(b) シルトに対して異なる負圧境界条件（$h_i = -500$ cm，$h_0 = -1, -10, -17, -31, -55, -80$ cm）を与えたときの積算浸潤水量 I と時間の平方根 $t^{1/2}$ の関係.

2. 水平浸潤

水平に置かれた一定な初期圧力 h_i（初期水分量 θ_i）を持つ土カラムの一端に一定境界圧力 h_0（境界水分量 θ_0）を与えたときの浸潤を考える．Green and Ampt の浸潤モデルにおいては，浸潤前線の広がり（Fig. 1 (a)）を無視し，階段状の矩形分布を維持すると仮定する．Fig. 1 (b) に G & A モデルの水分分布の概念図を示す（Jury and Horton，2006）．幅 L の前線湿潤部の伝達領域では，圧力水頭 h_0，水分量 θ_0，透水係数 K_0 は一定である．そして，浸潤前線の有効圧力水頭（effective pressure head at the front）として h_F を定義する（Hillel，2001; Warrick，2003）．この h_F の和訳には，「前進毛管力」が用いられることも多い（長谷川，2007；宮崎ら，2005）．しかし，「前進毛管力」に相当する用語は，最近の欧米の教科書や論文に見られないので，以下，前線有効圧力と表記する．

初期圧力 h_i（初期水分量 θ_i）の水平な土カラムの一端に一定境界圧力 h_0（境界水分量 θ_0）を与えたとき，ある時間経過後の浸潤前線の位置を L とすると，浸潤速度 i [注 1] は次のダルシー則で与えられる.

$$i = |q_0| = -K_0 \frac{h_F - h_0}{L} = K_0 \frac{\Delta h}{L} \tag{1}$$

ここで，$\Delta h = h_0 - h_F > 0$ である．この浸潤速度 i は，土の貯水量の時間変化率に等しい.

$$i = \frac{d}{dt}[(\theta_0 - \theta_i)L] = \Delta\theta \frac{dL}{dt} \tag{2}$$

ここで，$\Delta\theta = \theta_0 - \theta_i > 0$ である．(1) 式，(2) 式を L に関して解くと（Jury and Horton，2006），

$$\frac{L^2}{2} = K_0 \frac{\Delta h}{\Delta\theta} t \tag{3}$$

注 1：前報において浸潤速度 i と表面境界フラックス q_0 の使用に混乱があったので，ここで $i = |q_0|$ として再定義する.

ここで，積算浸潤水量は $I = L\Delta\theta$ であるので，I に関して次式が得られる.

$$I = t^{1/2}\sqrt{2\Delta\theta K_0 \Delta h} \tag{4}$$

Philip（1957）は，初期水分量 θ_i の水平な土カラムに境界水分量 θ_0 を与えたときの浸潤に対して，水平方向のリチャーズ式（後述の (8) 式）に基づき積算浸潤水量 I を得た（Jury and Horton，2006；第 2 報 (8) 式）.

$$I = St^{1/2} \tag{5}$$

ここで，S は吸水度（sorptivity）である．ここで注目すべきは，G & A モデルの (4) 式は，リチャーズ式から得られる Philip の水平浸潤モデルの (5) 式と等しく，積算浸潤水量 I，すなわち浸潤前線の位置 L が $t^{1/2}$ に比例して増加する点である．これは，拡散方程式における粒子の平均拡散距離が，経過時間の平方根に比例する関係と等しい（Atkins，1993）．Philip の功績は，拡散型の非線形方程式であるリチャーズ式に対しても (5) 式を得て，吸水度 S を定義したことである．Green and Ampt（1911）の先見性は，不飽和水分移動式が定式化される以前に，単純な毛管のモデルから拡散型方程式の本質的な性質としての (4) 式を得ていたことであろう.

Philip の浸潤モデルの S は，(4)，(5) 式より G & A モデルの前線有効圧力 h_F と関連づけられる.

$$S = \sqrt{2\Delta\theta K_0 \Delta h} = \sqrt{2\Delta\theta K_0 (h_0 - h_F)} \tag{6}$$

反対に，S が与えられると h_F を決定できる.

$$h_F = h_0 - \frac{S^2}{2\Delta\theta K_0} \tag{7}$$

はじめに，このような G & A モデルを水平浸潤の数値実験の結果に適用することで，モデルの特性を具体的な計算例に対して示す．数値実験に用いた水平方向の一

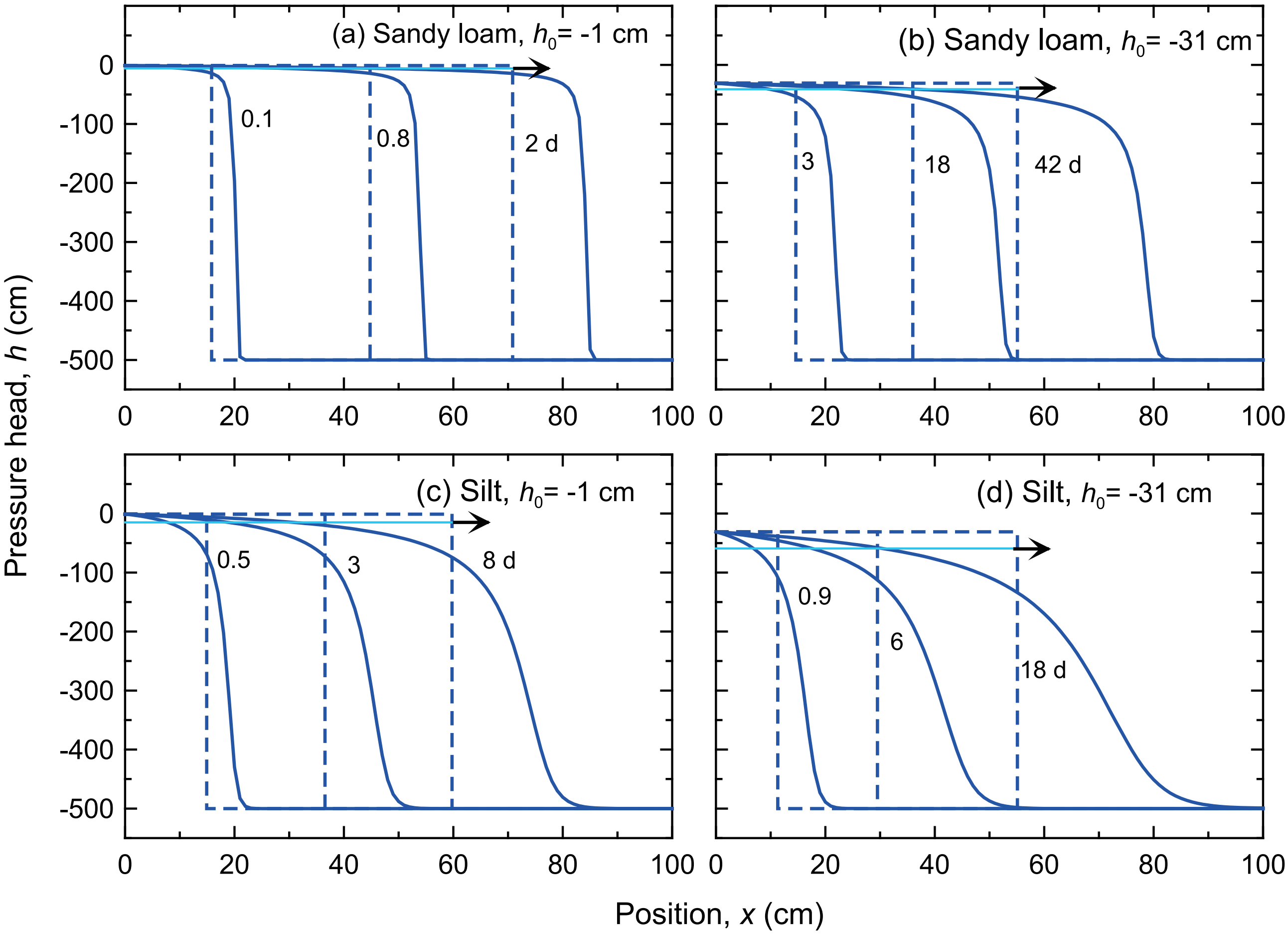

Fig. 3　初期圧力 $h_i = -500$ cm と 2 種類の負圧境界条件（$h_0 = -1$，-31 cm）を与えた水平浸潤における（a）（b）砂質ロームと（c）（d）シルトの圧力水頭分布 $h(x)$.

次元リチャーズ式は，鉛直方向のリチャーズ式（第 1 報（2）式）の重力項を省いた次式で与えられる．

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(h)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right] \tag{8}$$

ここで，x は水平方向位置（L）で右向き正である．そして，左端境界圧力 h_0 一定条件（第 2 報（4）式），初期圧力 h_i 一定条件（第 2 報（3）式）を与えた．なお，右端境界には便宜的に圧力勾配ゼロの自由排水条件（第 2 報（5）式）を与えたが，重力の働かない水平浸潤においては物理的な意味が不明確であるため，以下の議論では浸潤前線が右端に到達するまでの計算結果を対象とした．

Fig. 2 は，砂質ロームとシルトに 6 種類の境界圧力 h_0 を左端に与えた数値実験における積算浸潤水量 I と時間の平方根 $t^{1/2}$ との関係である．初期圧力は，$h_i = -500$ cm である．いずれの条件も直線関係を示し，（4）式の関係を確認できる．そこで，この I の直線の傾きに対して，それぞれの条件の $\Delta\theta$，K_0，h_0 を与えて，前線有効圧力 h_F を求めた．なお，（5）式で示される I の直線の傾きの吸水度 S については，$h_0 = -1$，-10，-31 cm のときの初期水分量 θ_i との関係を第 2 報の Fig. 7（a），Fig. 8（a）に示している．

砂質ロームの浸潤水量は，飽和に近い $h_0 = -1$ cm の条件では大きいが，境界圧力 h_0 の低下に伴い大きく減少する．これは，第 1 報 Fig. 1 に示した不飽和透水係数 K の特性である．一方，シルトの場合は，境界圧力の低下による浸潤水量の低下は比較的小さい．$h_i = -500$ cm の初期条件を持つ砂質ロームとシルトでは，境界圧力が $h_0 = -17$ cm のとき I が一致する点は興味深い．水平浸潤では，土性にかかわらず I は $t^{1/2}$ に比例するため，砂質ロームとシルトのように不飽和透水係数 K の大小関係が飽和付近と乾燥側で逆転する土においては（第 1 報 Fig. 1），I の時間変化が一致する境界圧力 h_0 が存在する．砂質ロームとシルトの場合，$h = -31$ cm で K が一致するが，境界圧力が $h_0 = -17$ cm のとき，前線湿潤部と前線先端部における K の大小関係の効果が釣り合うと考えられる．

初期圧力 $h_i = -500$ cm の砂質ロームおよびシルトに対して，境界圧力 $h_0 = -1$，-31 cm を与えたときの圧力分布を Fig. 3，水分分布を Fig. 4 に示す．図には，それぞれの分布に対して（3）式で与えられる前線位置 L の G & A モデルの矩形分布を破線で示した．また，圧力分布に対しては，前線有効圧力 h_F を矢印で示した．水平浸潤のそれぞれの条件の h_F と $\theta(h_F)$ の値を Table 1 に示す．

Fig. 3 の砂質ロームの圧力分布は，浸潤前線の圧力勾配が非常に大きいのが特徴である．とりわけ境界圧力が飽和に近い $h_0 = -1$ cm では著しく急な勾配の前線が形

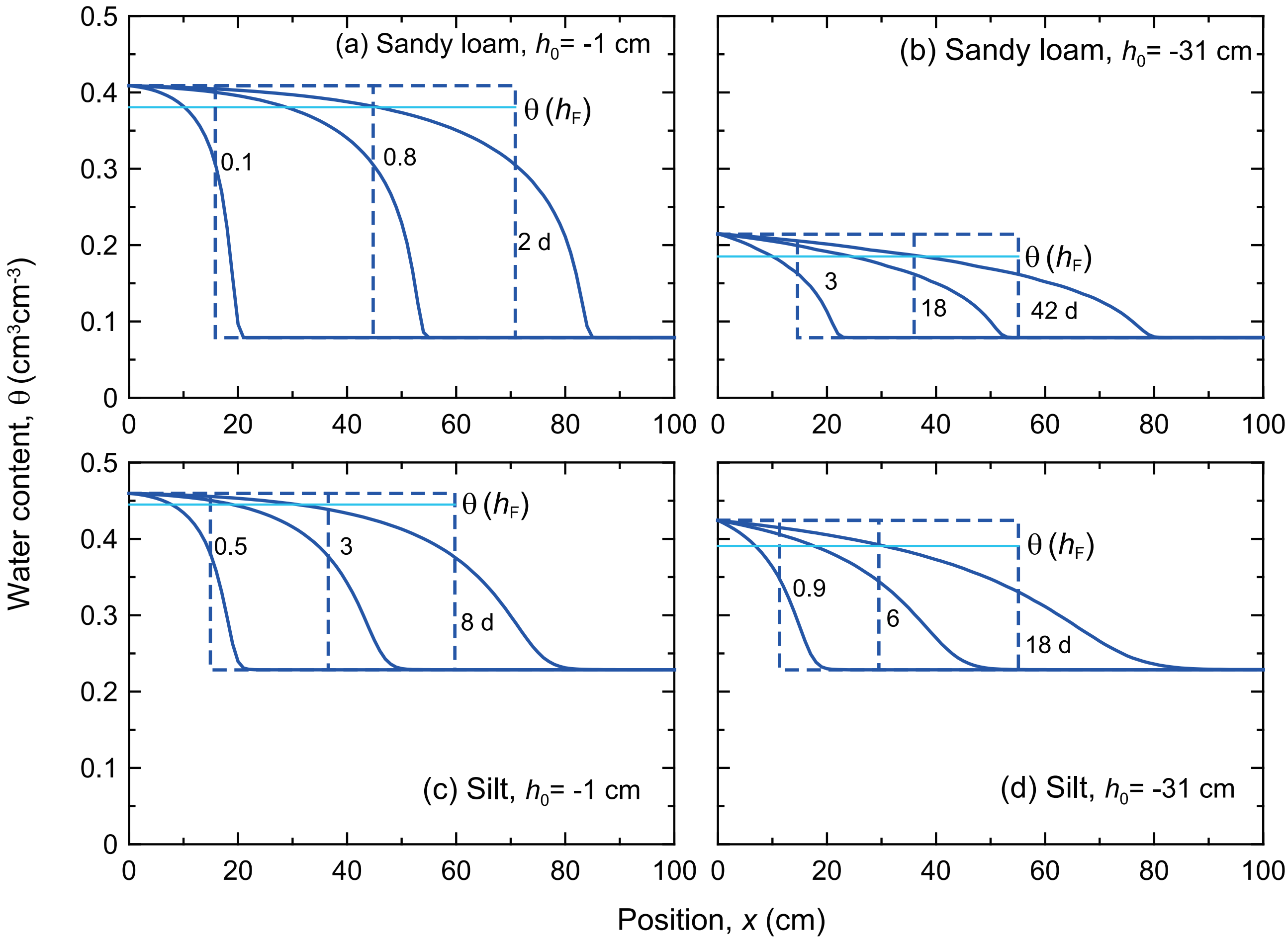

Fig. 4 初期圧力 $h_i = -500$ cm と 2 種類の負圧境界条件（$h_0 = -1$, -31cm）を与えた水平浸潤における（a）（b）砂質ロームと（c）（d）シルトの体積含水率分布 $\theta(x)$.

Table 1 砂質ロームとシルトの負圧境界条件（$h_i = -500$ cm, $h_0 = -1$, -31 cm）における水平浸潤の前線有効圧力 h_F.

Soil type	h_0 (cm)	h_F (cm)	Δh (cm)	$\theta(h_F)$ (cm^3 cm^{-3})
Sandy loam	−1	− 5.8	4.8	0.381
	−31	−41.1	10.1	0.185
Silt	− 1	−15.0	14.0	0.445
	−31	−59.1	28.1	0.391

成され，前線が 80 cm 程度まで達している 2 d においても前線の広がりはほとんど見られない．初期圧力 $h_i = -500$ cm における $h_0 = -1$ cm の浸潤は，境界の透水係数が $K(h_0) = 85.9$ cm d^{-1} と最も大きく，また前線先端部において $K(h_i) = 5.25\times10^{-6}$ cm d^{-1} と最も小さい（第 1 報 Fig. 7（d））．水平浸潤の水分フラックスは，圧力勾配成分のみが働くが，前線先端部においては，大きな圧力勾配を打ち消すほど K が著しく小さい．そのため，前線湿潤部に比べて水分フラックスが非常に小さく，前線先端部における水分の広がりを抑えている．一方，シルトでは，前線先端部の不飽和透水係数が $K(h_i) = 9.23 \times 10^{-4}$ cm d^{-1} と砂質ロームに比べて大きいため，前線先端部が拡散移動に特徴的な末広がりの形状を示している．

G & A モデルは，このような実線の圧力分布による水分移動を，矩形分布と（1）式のダルシー則に置き換えるモデルである．そのため，G & A モデルの前線位置 L と駆動力 Δh が，実際の圧力分布に対してどのような位置関係にあるかは興味深い．Fig. 3（a）（b）の砂質ロームでは，波線の G & A モデルの浸潤前線位置 L は，実線の数値実験の圧力分布の前線に比べて大きく遅れている．これは，前線位置 L を圧力分布に対してではなく，浸潤水量に基づき $I = L\Delta\theta$ の関係で与えることが原因である．砂質ロームでは，低圧力領域の水分容量 C_w が小さく，圧力が大きく変化しても水分量変化 $\Delta\theta$ は小さい（第 1 報 Fig. 2）．そのため，実線と破線の交点である G & A モデルの前線位置 L の圧力は境界圧力 h_0 に近く，前線位置 L の前方で大きな圧力低下の生じる圧力分布となる．前線有効圧力 h_F は，$h_0 = -1$ cm では $h_F = -5.8$ cm, $h_0 = -31$ cm では $h_F = -41.1$ cm であり，$\Delta h = h_0 - h_F$ は小さい（Table 1）．これは，（1）式のダルシー則において，K_0 が大きい分，Δh が相対的に小さくなるためである．一方，Fig. 3（c）（d）のシルトの圧力分布における G & A モデルの浸潤前線位置 L は，砂質ロームに比べて実線の圧力分布に対する遅れは小さい．また，砂質ロームより前線有効圧力 h_F は小さく，Δh は大きい（Table 1）．

Fig. 4（a）（b）の砂質ロームの数値実験の水分量分布は，圧力分布と比較するとなだらかであるが，前線先端部が広がらない形状である．波線の G & A モデルの浸潤前線位置 L は，実線で示す数値実験の水分分布の中心に位置する．すなわち，G & A モデルの浸潤前線より前方に分布する水分量は，前線後方の波線と実線で囲まれ

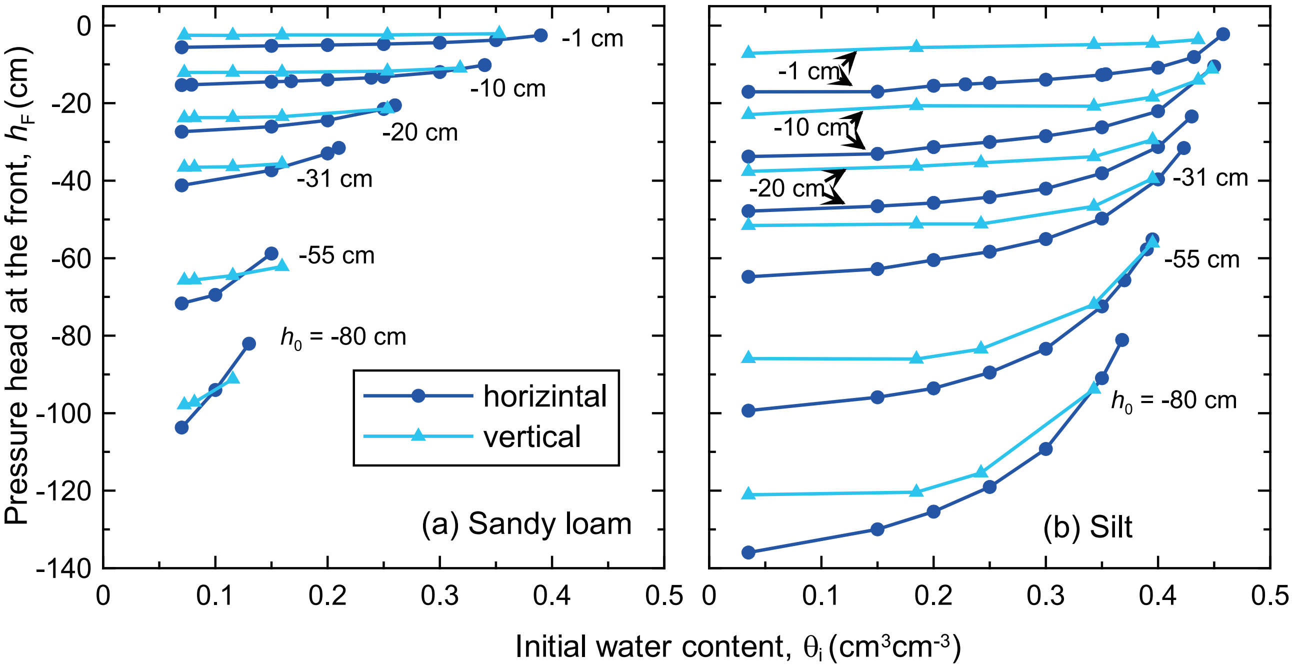

Fig. 5　(a) 砂質ローム，(b) シルトに対して異なる負圧境界条件 h_0 を与えた水平浸潤（●印）と鉛直浸潤（▲印）の前線有効圧力 h_F と初期水分量 θ_i の関係.

た水分量と等しい．Fig. 4 の前線有効圧力 h_F に対応する水分量 $\theta(h_F)$ は (Table 1)，G & A モデルの前線位置 L の水分量よりも高い．Fig. 4 (c) (d) のシルトの水分分布は，砂質ロームに比べてなだらかな形状を示す．Fig. 2 に示したように，砂質ロームとシルトの浸潤速度 i が一致するのは $h_0 = -17$ cm である．そのため，$h_0 = -31$ cm では，シルトは砂質ロームに比べて水分量の増加が大きく，前線の進行も速い．

Fig. 5 の丸のプロットは，水平浸潤における異なる境界圧力 h_0（境界水分量 θ_0）に対する砂質ロームとシルトの前線有効圧力 h_F と初期水分量 θ_i の関係である．前線有効圧力 h_F は，境界圧力 h_0 が小さいほど小さい．初期水分量 θ_i が小さいほど h_F は小さいが，境界圧力 h_0 が大きい条件での初期水分量 θ_i に対する変化は小さい．この図から判断しにくいが，前線の駆動力である $\Delta h = h_0 - h_F$ は，h_0 が小さいほど大きく (Fig. 3)，また θ_i が小さいほど大きい．シルトは砂質ロームに比べて h_F が小さく，初期水分量 θ_i に対する変化は大きい．G & A モデルの前線有効圧力 h_F を土の不飽和水分移動特性のひとつと考えると，さらに異なる土性について，負圧浸潤の前線有効圧力 h_F と初期水分量 θ_i の関係を整理する必要がある．また，第 2 報 Fig. 6 の浸潤前線の移動速度 V_F や Fig. 7, Fig. 8 の Philip の浸潤モデルのパラメータの同様の関係との比較も今後の課題である．

3. 鉛直浸潤

鉛直浸潤に対して G & A モデルを適用する場合は，水平浸潤の (1) 式と同様に，地表面 $z = 0$ と浸潤前線 $z = -L$ に対してダルシー則を適用する．

$$i = |q_0| = \frac{K_0}{L}(\Delta h + L) \tag{9}$$

初期水分量 θ_i の重力排水が無視できるとき，浸潤速度 i は水平浸潤と同じく (2) 式で与えられる．重力排水を考慮した浸潤速度 i に対する G & A モデルについては付録に示す．(2) 式を (9) 式に代入して積分すると次式が得られる (Jury and Horton, 2006)．

$$L - \Delta h \ln\left(1 + \frac{L}{\Delta h}\right) = \frac{K_0 t}{\Delta\theta} \tag{10}$$

積算浸潤水量 $I(t) = L\Delta\theta$ を用いると，

$$I(t) - \Delta h\Delta\theta \ln\left(1 + \frac{I(t)}{\Delta h\Delta\theta}\right) = K_0 t \tag{11}$$

浸潤が始まった直後において I は小さいので，(11) 式の対数項は次式で近似できる．

$$\ln\left(1 + \frac{I(t)}{\Delta h\Delta\theta}\right) \approx \frac{I(t)}{\Delta h\Delta\theta} - \frac{1}{2}\left(\frac{I(t)}{\Delta h\Delta\theta}\right)^2 \tag{12}$$

この関係を (11) 式に代入して I を求めると，I が $t^{1/2}$ に比例する水平浸潤の場合と等しい (4) 式が得られる．(4) 式を前線位置 L に関して書き換えると，

$$L = t^{1/2}\sqrt{\frac{2K_0\Delta h}{\Delta\theta}} \tag{13}$$

このとき浸潤前線の移動速度 V_F は，

$$V_F = \frac{dL}{dt} = t^{-1/2}\sqrt{\frac{K_0\Delta h}{2\Delta\theta}} \tag{14}$$

一方，浸潤後非常に長い時間が経過すると，(11) 式の左辺第 2 項は相対的に小さくなり，K_0 の重力流れである次式が得られる．

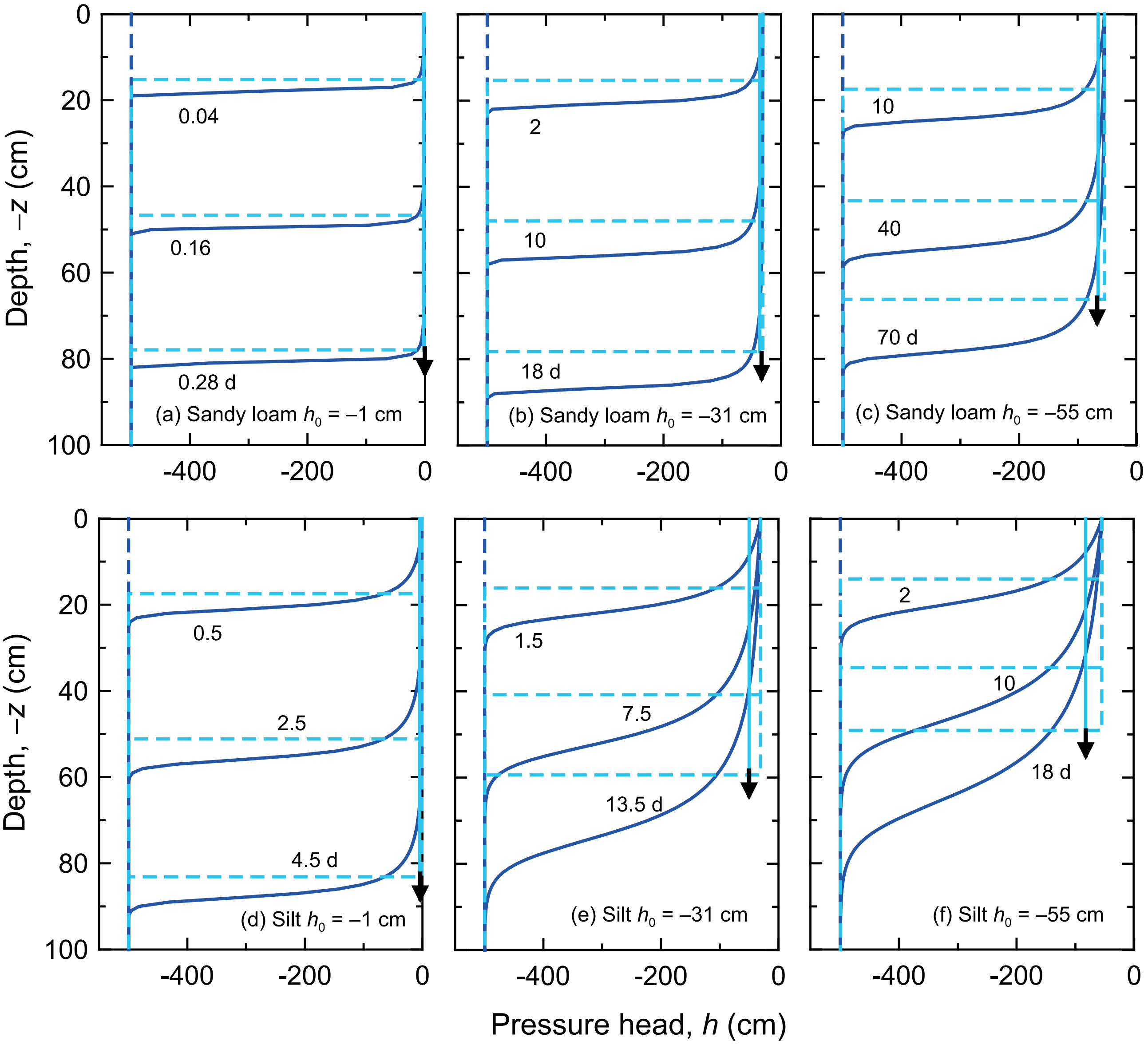

Fig. 6　(a)(b)(c) 砂質ローム，(d)(e)(f) シルトに対して初期圧力 $h_i = -500$ cm と 3 種類の負圧境界条件（$h_0 = -1$, -31, -55 cm）を与えた鉛直浸潤における圧力水頭分布 $h(z)$.

$$I = K_0 t \tag{15}$$

このとき $L = K_0 t/\Delta\theta$ であるので浸潤前線の移動速度 V_F は，

$$V_F = \frac{dL}{dt} = \frac{K_0}{\Delta\theta} \tag{16}$$

この関係は，初期水分量の重力排水を無視して求めた第 2 報（7）式と等しい．以上のように，G & A モデルの（11）式は，水平浸潤に近い浸潤初期から重力項が卓越する浸潤後期への変化する過程を表現している．これは，G & A モデルの矩形分布に基づく（9）式のダルシー則の右辺において，浸潤初期の L が小さいときは圧力勾配成分の $\Delta h/L$ が卓越するが，浸潤が進行して L が増加すると，$\Delta h/L$ が小さくなって第 2 項の動水勾配 1 の重力成分が支配的になるためである．この（11）式は，積算浸潤水量 I の G & A 式ともよばれる（Radcliffe and Šimůnek，2010）．

また，$L = \Delta\theta/I$ を（9）式に代入すると，次式の浸潤速度 i が得られる（Hillel，2001；宮崎，2000）．

$$i = \frac{K_0 \Delta\theta \Delta h}{I} + K_0 \tag{17}$$

この鉛直浸潤の浸潤方程式である（17）式を，G & A 式とよぶことも多い．この（17）式においても，I が小さい浸潤初期には圧力勾配成分の右辺第 1 項が第 2 項の重力項に比べて卓越し，浸潤速度 i は I に反比例して減少する．重力項が卓越する浸潤後期では，相対的に右辺第 1 項が小さくなって，最終的には $i \approx K_0$ となる．

鉛直浸潤における前線有効圧力 h_F は，数値実験における積算浸潤水量 I と（11）式より決定できる．時間 t における I(t) に対して次の $f(\Delta h,t)$ を定義する．

$$f(\Delta h,t) = I(t) - \Delta h\Delta\theta \ln\left(1 + \frac{I(t)}{\Delta h\Delta\theta}\right) - K_0 t \tag{18}$$

そして，$f(\Delta h,t) = 0$ を満たす解として Δh を求めると，

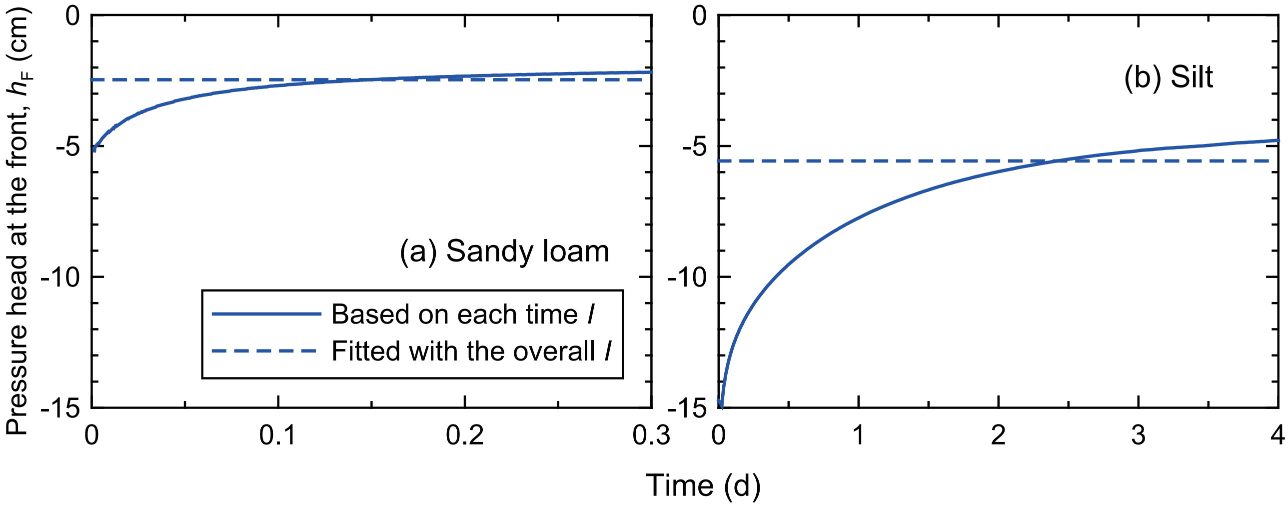

Fig. 7　(a) 砂質ローム，(b) シルトに対して初期圧力 $h_i = -500$ cm，境界圧力 $h_0 = -1$ cm を与えたときの鉛直浸潤における前線有効圧力 h_F（実線）の時間変化と積算浸潤水量 I に対する最適値 $\bar{h}_F$（波線）.

Table 2　砂質ロームとシルトの負圧境界条件（$h_i = -500$ cm, $h_0 = -1$, -31, -55 cm）における鉛直浸潤の前線有効圧力の最適値 $\bar{h}_F$.

Soil type	h_0 (cm)	$\bar{h}_F$ (cm)	Δh (cm)	$\theta(\bar{h}_F)$ ($cm^3\ cm^{-3}$)
Sandy loam	− 1	− 2.5	1.5	0.403
	−31	−36.3	5.3	0.197
	−55	−65.8	10.8	0.147
Silt	− 1	− 5.3	4.3	0.456
	−31	−50.0	19.0	0.401
	−55	−82.6	27.6	0.368

$\Delta h = h_0 - h_F$ より h_F が得られる．ここで，I は水平浸潤のように時間の平方根 $t^{1/2}$ と比例関係（Fig. 2）にないため，鉛直浸潤では h_F は一定ではなく，時間の関数となることは留意点である．

一方，h_F が一定値で定まる水平浸潤との比較のため，h_F を最適化するパラメータとみなし（Radcliffe and Šimůnek，2010），数値実験の積算浸潤水量の時間変化 I(t) を再現する $\bar{h}_F$ を次の手順で求め，h_F の最適値とした．通常ならば，数値実験の $I(t)$ に対して G & A モデルの $I(t)$ を適合させて h_F を決定する．しかし，(11) 式において I を t に関して解析的に解くことはできない．そこで，(11) 式において t を I の関数とみなし，$t(I)$ を最もよく再現する h_F を求めた．具体的には，土カラムの下端に浸潤前線が到達するまでの I の全データに対して，$\sum(t(I)-t)^2$ を最小にする Δh より最適値 $\bar{h}_F$ を求めた．なお，本解説では初期水分量 θ_i が高い土に対しても h_F を評価するために，(11) 式の代わりに付録に示した重力排水を考慮した (A6) 式を用いたが，θ_i が極端に高い条件を除いて両式の解に違いはないことは確認した．

Fig. 6 は，長さ 100 cm，初期圧力 $h_i = -500$ cm の砂質ロームおよびシルトに対して，3 種類の一定負圧（$h_0 = -1$，-31，-55 cm）を与えたときの圧力分布である．これら条件は，第 1 報の一定負圧の計算と同じ条件であり，Fig. 6 に対応する透水係数分布と水分量分布は第 1 報 Fig. 7 に示してある．Fig. 6 の図中には，水平浸潤の場合と同様に G & A モデルの矩形分布と積算浸潤水量 I の全体から得た $\bar{h}_F$ を矢印で示した．それぞれの条件の $\bar{h}_F$ の値は Table 2 に示した．浸潤前線位置 L には，初期水分量 θ_i の重力排水を考慮した (A5) 式を用いた．

Fig. 6 の鉛直浸潤の圧力分布は，水平浸潤（Fig. 3）に比べて前線の圧力勾配が大きい．これは，第 1 報において詳細を解説したように，前線浸潤部において重力成分が大きく，前線の広がりが抑制されるためである．特に境界圧力 $h_0 = -1$ cm の場合の鉛直浸潤は，水平浸潤に比べて前線勾配がより急な分布である．水平浸潤の場合と同様に，$\Delta h = h_0 - h_F$ は，h_0 が大きいほど小さく，また砂質ロームに比べてシルトの方が大きい．

Fig. 7 は，境界圧力 $h_0 = -1$ cm の場合の，各時間の I から時間の関数として求まる h_F と全体の I のデータに (11) 式を適合して求めた $\bar{h}_F$ の比較である．いずれの土も，h_F は時間の経過により増加し，水平浸潤とは異なり，鉛直浸潤では前線有効圧力 h_F を一定値で表すことができない。ここで，Fig. 7 において $t = 0$ の切片として与えられる h_F は，Fig. 3 に示した同じ境界圧力 $h_0 = -1$ cm の水平浸潤の h_F にほぼ等しい（Table 1）．圧力勾配成分が支配的な鉛直浸潤初期は，圧力勾配成分のみの水平浸潤の (4) 式で表現できることに対応している。また，時間の経過とともに水平浸潤の h_F からずれていくことは，重力成分が卓越し始めることに対応している。すなわち，前線有効圧力 h_F の時間変化は，鉛直浸潤の浸潤フラックス（第 1 報 (1) 式）が，圧力勾配成分から重力成分への支配要因の変化が原因である．また，(15) 式に h_F が含まれないことからも，重力成分のみが支配する $t \to \infty$ においては，前線有効圧力 h_F は浸潤に対して物理的な意味を持たないことがわかる．

圧力成分と重力成分の相対的な大きさは，土性，境界条件，初期条件に依存する．第 2 報では，Philip の浸潤モデル（第 2 報 (10) 式）について，吸水度 S と定数 A の比 S/A を用いて重力成分に対する圧力成分の大きさを考察した．そして，境界圧力 h_0（境界水分量 θ_0）が大き

いほど，また初期圧力 h_i（初期水分量 θ_i）が小さいほど S/A の値が大きく，圧力成分の役割が相対的に大きいことを示した．砂質ロームでは，h_0 と h_i が共に小さく乾燥した条件を除き重力成分が支配的であり，逆にシルトでは多くの条件で圧力成分が相対的に大きい．Fig. 7 の境界圧力 $h_0 = -1$ cm，初期圧力 $h_i = -500$ cm の条件における S/A の値は，砂質ロームは 0.5，シルトは 4.3 である（第 2 報 Fig. 9）．そのため，浸潤初期の圧力成分が相対的に大きいシルトでは，圧力成分から重力成分へと移行する過程における前線有効圧力 h_F の変化が砂質ロームに比べて大きいと解釈できる．

このように鉛直浸潤における前線有効圧力 h_F は，浸潤初期に増加する．一定値の $\bar{h}_F$ を用いて浸潤速度 i を（11）式と（17）式から求めると，全体的な i の変化を概ね再現するが，浸潤初期の i を過小評価する．第 2 報 Fig. 2（b）に境界圧力 $h_0 = -1$ cm，初期圧力 $h_i = -500$ cm のシルトの浸潤速度 i を示した．ここでは結果は省略するが，G & A モデルの浸潤初期の i は，図中に波線で示した Philp の浸潤モデル（第 2 報（10）式）と同様に過小評価した．これは，浸潤初期に $\bar{h}_F$ が h_F に比べて大きく，駆動力の $\Delta h = h_0 - h_F$ を過小評価するためである．このように，G & A モデルの鉛直浸潤に対する適用限界は，前線有効圧力 h_F が一定値として定まらないことである．

Fig. 5 には，鉛直浸潤における異なる境界圧力 h_0（境界水分量 θ_0）に対する砂質ロームとシルトの前線有効圧力 h_F の最適値としての $\bar{h}_F$ と初期水分量 θ_i の関係も併記した．鉛直浸潤の $\bar{h}_F$ は，水平浸潤と同様の関係を示すが，同じ境界圧力 h_0 と初期条件 θ_i の水平浸潤の h_F に比べて大きく，$\Delta h = h_0 - h_F$ は小さい．鉛直浸潤と水平浸潤の h_F の違いは，シルトで大きく，砂質ロームでは小さい（Table 1，Table 2）．この傾向は，境界圧力 h_0 が小さいほど，また初期水分量 θ_i が小さい条件ほど顕著である．これは，Fig. 7 で考察したように，水分フラックスにおいて圧力成分が重力成分に対して相対的に大きい条件ほど $\Delta h = h_0 - h_F$ が大きいためである．

境界圧力 $h_0 = -1$ cm，初期圧力 $h_i = -500$ cm の砂質ロームの鉛直浸潤の水分分布は，浸潤後短い時間で前線形状は一定になり，最も急な前線勾配を保ちながら下方へと浸潤していく（第 1 報 Fig. 7（g））．これは，Fig. 1（b）の概念図の G & A モデルの矩形分布に近い浸潤前線の形状である．また，この条件は，Fig. 5 に示したように鉛直浸潤と水平浸潤の前線有効圧力 h_F の違いの小さい条件でもある．これが，乾いた砂への飽和鉛直浸潤は，G & A モデルが適合する条件と考えられている理由である．しかし，そのような浸潤前線が広がらない条件においても，浸潤初期においては，前線有効圧力 h_F は増加しながら圧力項から重力項へと支配要因が変化していく（Fig. 7（a））．そして，重力項が支配する段階では，（9）式のダルシー則の右辺 2 項の圧力勾配成分，すなわち（11）式の左辺第 2 項や（17）式の右辺第 1 項が相対的に小さくなって，h_F は不要となる点には留意する必要がある．

4. おわりに

本報では，砂質ロームとシルトの一定負圧境界条件の水平浸潤と鉛直浸潤に対して，G & A モデルを適用して検討を行った．水平浸潤の G & A モデルは，水平浸潤のリチャーズ式から得られる Philip の浸潤モデルと等価であり，積算浸潤水量 I を一定値の前線有効圧力 h_F を用いて表現できる．そこで，異なる境界圧力 h_0 と初期圧力 h_i の水平浸潤の数値実験に対して，積算浸潤水量 I と時間の平方根 $t^{1/2}$ の関係の傾きから前線有効圧力 h_F を決定した．浸潤前線の駆動力である $\Delta h = h_0 - h_F$ は，h_0 が大きいほど小さく，また θ_i が小さいほど大きい．シルトは砂質ロームに比べて h_F が小さく，初期水分量 θ_i に対する変化は大きい．

鉛直浸潤における前線有効圧力 h_F は一定値としては定まらず，積算浸潤水量 I の変化に対応した時間の関数である．水分フラックスの圧力勾配成分が支配的な浸潤直後の h_F は水平浸潤に近い値を示すが，時間が経過して重力成分が相対的に大きくなるにつれて h_F は増加し，$\Delta h = h_0 - h_F$ は小さくなる．そこで積算浸潤水量 I の変化を最もよく再現する前線有効圧力 h_F を最適値 $\bar{h}_F$ として定義し，境界圧力 h_0 と初期水分量 θ_i との関係を求めたところ，水平浸潤と同様の関係を示したが，鉛直浸潤の $\bar{h}_F$ は水平浸潤の h_F に比べて大きい値を示した．また，この傾向はシルトの初期水分量 θ_i の小さい条件ほど顕著であった．

拡散方程式において粒子の平均拡散距離が経過時間の平方根に比例する関係（Atkins，1993）を，非線形方程式のリチャーズ式の水平浸潤に対しても成立することを示し，吸水度 S を得たことが Philip の功績である．不飽和水分移動式が確立する以前に，単純な毛管のモデルから拡散型方程式の本質的な性質として同じ関係式を得ていたことが Green and Ampt（1911）の先見性である．圧力勾配により水分が移動する水平浸潤の積算浸潤水量 I に対して，前線有効圧力 h_F が一定値に定まることが G & A モデルの本質であろう．

一方，G & A モデルを鉛直浸潤に適用すると，圧力勾配が卓越する浸潤初期から重力項の役割が大きくなっていく過程について，積算浸潤水量 I や浸潤前線の移動速度 V_F の変化を表現できる．矩形分布に（9）式のダルシー則を適用する単純な仮定にも関わらず，鉛直浸潤の本質的な性質を表現する点には，むしろ驚かされるほどである．乾いた砂へ飽和浸潤を与えると，浸潤前線が広がらずに急勾配な浸潤前線を維持する．これは，G & A モデルの矩形分布に近い浸潤前線の形状であるが，浸潤初期においては前線有効圧力 h_F は増加し，時間が経過すると重力項が支配的になり，前線有効圧力 h_F の役割が小さくなることを明らかにした． 以上のような G & A モデルの鉛直浸潤に対する適用限界を示した点は，今回の解析の成果と考える．

現在，G & A の論文が出されて 100 年の月日が経過しているが，改めて不飽和水分 · 溶質移動汎用プログラム

を用いた詳細な検討を行ってみたところ，筆者らにとって実に多くのことを学ぶことができ，またまだ検討すべき課題が残されていることに気がつかされた．これが，Green and Ampt（1911）が古典としての地位を確立している理由であろう．今回求めた負圧境界の様々な条件における前線有効圧力 h_F については，Neuman（1976）が不飽和透水係数の積分で評価した飽和浸潤の h_F のモデルを負圧浸潤に拡張し，物理的な意味の検討を行うことが必要と考える（宮崎，1984）．

次報では，土中への水の浸潤をさらに成層土を対象に解説する予定である．

付録

鉛直浸潤の場合は，第 2 報の Fig. 5（c）に示すように，厳密には浸潤速度 i に初期水分量の重力排水を考慮する必要がある．

$$i = \Delta\theta \frac{dL}{dt} + K_i \quad \text{(A1)}$$

ここで，$K_i = K(h_i)$ である．（8）式のダルシー則に代入して整理すると，

$$\Delta\theta \frac{dL}{dt} = \frac{K_0}{L}(\Delta h + L) - K_i = \frac{K_0}{L}\left\{\Delta h + \left(1 - \frac{K_i}{K_0}\right)L\right\} \quad \text{(A2)}$$

$\eta = 1 - K_i/K_0 (> 0)$ とおいて積分すると，

$$\int_0^L \frac{LdL}{\Delta h + \eta L} = \frac{K_0}{\Delta\theta}\int_0^t dt = \frac{K_0 t}{\Delta\theta} \quad \text{(A3)}$$

左辺を評価すると，

$$\int_0^L \frac{LdL}{\Delta h + \eta L} = \frac{1}{\eta^2}\left\{\eta L - \Delta h \log\left(1 + \frac{\eta L}{\Delta h}\right)\right\} \quad \text{(A4)}$$

排水成分を考慮した積算水分量は $I(t) = L\Delta\theta + K_i t$ であるので，

$$L = \frac{I(t) - K_i t}{\Delta\theta} \quad \text{(A5)}$$

（A3），（A4），（A5）式より，

$$\frac{I(t) - K_i t}{\eta} - \frac{\Delta h \Delta\theta}{\eta^2}\ln\left[1 + \frac{\eta(I(t) - K_i t)}{\Delta h \Delta\theta}\right] = K_0 t \quad \text{(A6)}$$

ここで $K_0 \gg K_i \approx 0$ で重力排水が無視できるとき，$\eta = 1$ となり（A6）式は（11）式と等しい．

引用文献

Atkins, P.W. (1993)：物理化学（下）第 4 版（千原秀昭 · 中村亘男訳）．pp. 1130–1169，東京化学同人，東京．

Green, W.H. and Ampt, G.A.(1911): Studies on soil physics: I. The flow of air and water through soils. J. Agric. Sci., 4: 1–24.

長谷川周一（2007）：古典を読む：W. H. Green and G. A. Ampt 著「土壌物理に関する研究 第 1 部 土壌中の空気と水の流れ」．土壌の物理性，105: 111–115.

Hillel, D. (2001)： 環境土壌物理学 II 耕地の土壌物理—耕地生産力の向上と地球環境の保全—（岩田進午 · 内嶋善兵井衛監訳）．第 10 章，pp. 1–51，農林統計協会，東京．

Jury, W.A. and Horton, R. (2006): 土壌物理学—土中の水 · 熱 · ガス · 化学物質移動の基礎と応用—（取出伸夫 監訳：井上光弘 · 長裕幸 · 西村拓 · 諸泉利嗣 · 渡辺晋生訳）．pp. 73–159，築地書店，東京．

Radcliffe, D.E. and Šimůnek, J. (2010): Soil physics with HYDRUS: Modeling and applications. pp. 183–247, CRC Press, New York.

宮崎毅（1984）： 浸潤方程式．土壌の物理性，50：56–62.

宮崎毅（2000）：環境地水学．第 2 章，pp. 22–38，東京大学出版会，東京．

宮崎毅，長谷川周一，粕淵辰昭（2005）：土壌物理学，pp. 44–48，朝倉書店，東京．

Neuman, S.P. (1976): Wetting front pressure head in the infiltration model of Green and Ampt. Water Resour. Res., 12: 564–566.

Philip, J.R. (1957): The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution. Soil Sci., 83: 345–357.

Šimůnek, J., Šejna, M., Saito, H., Sakai., M. and van Genuchten, M.Th., (2008): The HYDRUS-1D software package for simulating the movement of water, heat, and multiple solutes in variably saturated media. Version 4.0, HYDRUS Software Series 3, Dep. of Environmental Sciences, Univ. of California Riverside, Riverside, CA, USA.

取出伸夫，渡辺晋生，坂井勝（2009）：土中への水の浸潤　1. フラックス境界と圧力境界条件. 土壌の物理性，113: 31–41.

取出伸夫，渡辺晋生，森﨑大樹（2010）：土中への水の浸潤　2. 初期水分量の及ぼす影響. 土壌の物理性，114: 71–79.

Warrick, A.W. (2003): Soil water dynamics. pp. 135–184, Oxford university press, New York.

要　　旨

様々な負圧境界圧力，初期圧力水頭を持つ砂質ロームとシルトを対象にした水平浸潤と鉛直浸潤の数値実験に対して，Green and Ampt（G & A）モデルを適用して検討を行った．水平浸潤では，積算浸潤水量 I と時間の平方根 $t^{1/2}$ の傾きから一定値の前線有効圧力 h_F が定まる．そこで，負圧浸潤の前線有効圧力 h_F について，境界圧力 h_0 と初期水分量 θ_i との関係を求めた．一方，鉛直浸潤の G & A モデルは，圧力勾配が卓越する浸潤初期から重力項の役割が大きくなっていく過程の積算浸潤水量 I や浸潤前線の移動速度 V_F の変化を表現できる．しかし，鉛直浸潤の前線有効圧力 h_F は，浸潤直後は水平浸潤に近い値を示し，その後，重力成分が相対的に大きくなるにつれて h_F は増加する．この前線有効圧力 h_F が一定値に定まらない点が G & A モデルの鉛直浸潤に対する適用限界である．

キーワード：Green and Ampt モデル，前線有効圧力，水平浸潤，鉛直浸潤，負圧浸潤